2015年 文学部 第2問

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ．

(1) 不等式 $|3x+2| < x^2+x+1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

(2) $\dfrac{3n+2}{n^2+n+1}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ．

(1) (i) $3x+2 \geqq 0$ すなわち $x \geqq -\frac{2}{3}$ のとき

$3x+2 < x^2+x+1 \iff x^2-2x-1>0$

$\iff x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x$

場合分けの条件とあわせて，$-\frac{2}{3} \leqq x < 1-\sqrt{2}$ ，$1+\sqrt{2}<x$

(ii) $3x+2<0$ すなわち $x<-\frac{2}{3}$ のとき

$-3x-2 < x^2+x+1 \iff x^2+4x+3>0$

$\iff (x+3)(x+1)>0$

$\iff x<-3,\ -1<x$

場合分けの条件とあわせて，$x<-3,\ -1<x<-\frac{2}{3}$

(i),(ii)より，$\underline{x<-3,\ -1<x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x}$ //

(2) $f(n)=\dfrac{3n+2}{n^2+n+1}$ とおくと，$f(n)=0 \iff n=-\frac{2}{3}$

これは整数でないので不適

よって，$f(n)$ が整数となるとき，$|f(n)| \geqq 1$ …①

$n^2+n+1=(n+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ より，$|f(n)|=\dfrac{|3n+2|}{n^2+n+1}$

①より，$|3n+2| \geqq n^2+n+1$

(1)より，この不等式をみたす n の範囲は，$-3 \leqq n \leqq -1,\ 1-\sqrt{2} \leqq n \leqq 1+\sqrt{2}$

n は整数より，$n=-3,-2,-1,0,1,2$

$f(-3)=-1$，$f(-2)=-\frac{4}{3}$，$f(-1)=-1$，$f(0)=2$，$f(1)=\frac{5}{3}$，$f(2)=\frac{8}{7}$

∴ 求める n は，$\underline{n=-3,-1,0}$ //