2010年 薬学部 第5問

$\boxed{5}$ 放物線 $y=x^2+1$ を C_1，放物線 $y=-x^2+6x-8$ を C_2 として次の問いに答えよ．

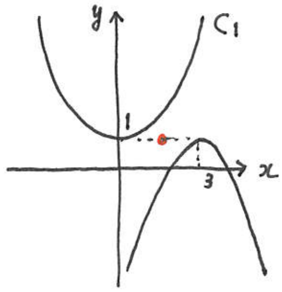
(1) 点 $\left(\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}},\ \boxed{1}\right)$ に関して，C_1 と C_2 は対称である．

(2) C_1 と C_2 の両方に接する2つの接線のうち，x 軸と交わらない方を ℓ_1，x 軸と交わる方を ℓ_2 とすると，ℓ_1 の方程式は $y=\boxed{1}$，ℓ_2 の方程式は $y=\boxed{6}\,x-\boxed{8}$ である．

(3) C_1 と ℓ_1 および ℓ_2 とで囲まれた部分の面積と，C_2 と ℓ_1 および ℓ_2 とで囲まれた部分の面積の和は $\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{2}}$ である．

(1) C_1 の頂点は $A(0,1)$，C_2 の頂点は $B(3,1)$

∴ 線分 AB の中点 $\left(\frac{3}{2},1\right)$ に関して対称　∴ $\left(\frac{3}{2},1\right)$



(2) $\ell_1: y=1$ はグラフより明らか．　∴ $\ell_1: y=1$

$\ell_2: y=ax+b$ とおくと，$x^2+1-ax-b=0$ が重解をもつので

判別式 D_1 は，$D_1=a^2-4(1-b)=0$　∴ $a^2=4-4b$ …①

$-x^2+6x-8-ax-b=0$ が重解をもつので，判別式 D_2 は，

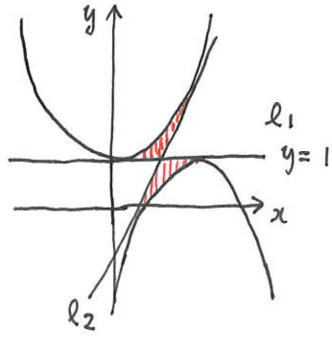
$D_2=(6-a)^2-4\cdot(-1)\cdot(-8-b)=0$　∴ $a^2-12a=4b-4$ …②

①＋②より，$2a(a-6)=0$　∴ $a=0,6$

$\ell_1 \neq \ell_2$ より，$a=6$，このとき，$b=-8$　∴ $\ell_2: y=6x-8$

(3) $\left(\frac{3}{2},1\right)$ に関して対称であることと，

ℓ_2 と C_1 の接点が $(3,10)$ より



$$S=2\int_{\frac{3}{2}}^{3} x^2+1-6x+8\,dx+2\int_{0}^{\frac{3}{2}} x^2+1-1\,dx$$

$$=2\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x-3)^2dx+2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=2\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{\frac{3}{2}}^{3}+\frac{9}{4}$$

$$=\frac{9}{2}$$