

2013年理(生化)・医(理療)・農・水産・共同獣医第3問

3 次の各問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の垂心を H とする。次の等式が成り立つことを示せ。

$$\vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} = \vec{HC} \cdot \vec{HA}$$

ただし、三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わる。この点を三角形の垂心という。

(2) 次の (i), (ii) に答えよ。

(i) 自然数  $n$  に対して自然数  $a_n$  を次のように定義する。

$$a_n = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1$$

このとき、すべての自然数  $k$  に対して  $(2k)! = 2^k k! a_k$  が成り立つ。このことを証明せよ。

(ii) すべての自然数  $n$  に対して、 $2^n!$  は  $2^{(2^n-1)}$  で割り切れる。このことを数学的帰納法で証明せよ。