県立広島大学

2016年 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

2 四面体OABCにおいて，$OA=2$，$OB=2$，$OC=4$，

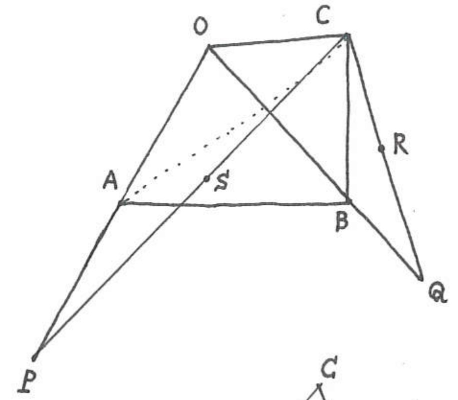
$$\angle AOB=\frac{\pi}{2},\quad \angle AOC=\frac{\pi}{3},\quad \angle BOC=\frac{\pi}{3}$$

とする．また，線分OAを2：1に外分する点をP，線分OBを3：2に外分する点をQとする．線分CQ，線分CPの中点をそれぞれR，Sとし，直線PRと直線QSの交点をTとする．さらに，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OT}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 点Tから平面OABに下ろした垂線をTHとする．$\overrightarrow{HT}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) 四面体OABTの体積を求めよ．



(1) 右の図より，メネラウスの定理を使って，

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{RT}{TP}=1 \quad よって，RT:TP=1:2$$

$$\therefore \overrightarrow{CT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CR}$$

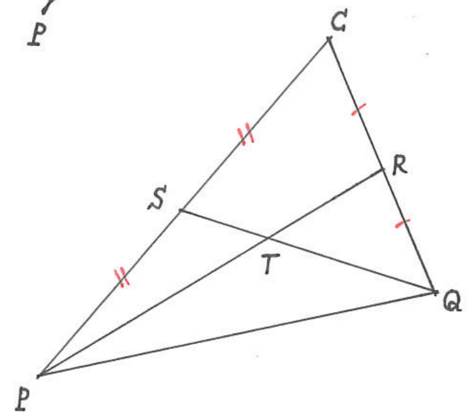
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CQ}$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OQ}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\cdot 3\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$$



$$\therefore \overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT}$$

$$=\underline{\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}\ //$$

(2) $\overrightarrow{OH}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{HT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OH}=\left(\frac{2}{3}-p\right)\vec{a}+(1-q)\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ …①

$\overrightarrow{HT}\perp$ 平面OABより，$\overrightarrow{HT}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{HT}\cdot\vec{b}=0$ であるから，

$$\overrightarrow{HT}\cdot\vec{a}=\left(\frac{2}{3}-p\right)|\vec{a}|^2+(1-q)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{8}{3}-4p+(1-q)\cdot 2\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{8}{3}-4p+\frac{4}{3}$$

$$\therefore 4-4p=0 \ より，\ p=1$$

2枚目へつづく

2016年 第2問　　2枚目/2枚　　数理 石井K

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，OA $=2$，OB $=2$，OC $=4$，

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$，　$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}$，　$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$

とする．また，線分OAを2：1に外分する点をP，線分OBを3：2に外分する点をQとする．線分CQ，線分CPの中点をそれぞれR，Sとし，直線PRと直線QSの交点をTとする．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 点Tから平面OABに下ろした垂線をTHとする．$\overrightarrow{\mathrm{HT}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) 四面体OABTの体積を求めよ．

(2)のつづき

$$\overrightarrow{HT}\cdot\vec{b}=\left(\frac{2}{3}-p\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-q)|\vec{b}|^2+\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=4(1-q)+\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 4\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=4-4q+\frac{4}{3}$$

$\therefore\ \dfrac{16}{3}-4q=0$　　$\therefore\ q=\dfrac{4}{3}$　　①より，$\underline{\overrightarrow{HT}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$ //

(3) (2)より．

$$|\overrightarrow{HT}|^2=\frac{1}{9}(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$
$$=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(4+4+16-2\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{8}{9}$$

$\therefore\ |\overrightarrow{HT}|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\triangle OAB$ は $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形より，$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$=\underline{\frac{4\sqrt{2}}{9}}\ //$$