

2016年文系第4問

4 四面体 OABC は,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OA} = 9, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OB} = 14,$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 1, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 3, \quad \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 5$$

を満たすものとする. また, 直線 AB 上の点 D を,  $\vec{OD}$  と  $\vec{AB}$  が垂直になるようにとり, 実数  $m$  を  $\vec{OD} = m\vec{OA} + (1-m)\vec{OB}$  となるように定める.  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$  とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $m$  の値を求めよ.

(2)  $m < s < 1$  を満たす実数  $s$  に対し, 辺 AB を  $(1-s) : s$  に内分する点 P をとる. さらに, 直線 AC 上の点 Q を,  $\vec{OP}$  と  $\vec{PQ}$  が垂直になるようにとり, 実数  $t$  を  $\vec{OQ} = t\vec{a} + (1-t)\vec{c}$  となるように定める.  $t$  を  $s$  を用いて表せ.

(3) (2) の  $t$  に対し,  $0 < t < 1$  が成り立つことを示せ.