

2014年医学部第4問

4 行列  $A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  で表される1次変換  $f$  について考える. 点  $P_0$  の座標を  $(1, 0)$  とし,  $n$  を正の整数とすると,  $f$  によって点  $P_{n-1}$  が移される点を  $P_n$  とする. また,  $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OQ_n}$  となる点  $Q_n$  の座標を  $(x_n, y_n)$  とし,  $n \rightarrow \infty$  のときに  $x_n, y_n$  がともに収束する場合の点  $Q_n$  の極限值  $Q \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$  を求めよう.

(1)  $r = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$  のとき,  $A^3 = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}} \begin{pmatrix} \text{エ} & \text{オ} \\ \text{オ} & \text{エ} \end{pmatrix}$  であり,  $P_7$  の座標は  $\left( \frac{\text{カ}}{\text{キクケ}}, \frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{キクケ}} \right)$  である.

(2)  $E - A$  が逆行列をもたない  $r, \theta$  ( $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) の条件は,  $r = \text{サ}$  かつ  $\theta = \text{シ}$  である. ただし,  $E$  は単位行列とする.

$E - A$  が逆行列をもつとき,  $n$  を2以上の整数とすると

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = E - A^n \text{ より}$$

$$E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = (E - A)^{-1}(E - A^n)$$

また,  $(E - A)^{-1} = \frac{1}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} \begin{pmatrix} 1 - r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & 1 - r \cos \theta \end{pmatrix}$  であるから

$$(E - A)^{-1}(E - A^n) = \frac{1}{r^2 - 2r \cos \theta + 1} T \text{ とすると}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 - r \cos \theta - r^n \text{ス} + r^{n+1} \text{セ} & -r \sin \theta + r^n \text{ソ} - r^{n+1} \text{タ} \\ r \sin \theta - r^n \text{ソ} + r^{n+1} \text{タ} & 1 - r \cos \theta - r^n \text{ス} + r^{n+1} \text{セ} \end{pmatrix}$$

である. ただし,  $\text{ス}, \text{セ}, \text{ソ}, \text{タ}$  には, 次の①~⑥の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと. なお, 同じ選択肢を選んでもよいものとする.

①  $\sin n\theta$  ②  $\cos n\theta$  ③  $\sin(n-1)\theta$  ④  $\cos(n-1)\theta$  ⑤  $\sin(n+1)\theta$  ⑥  $\cos(n+1)\theta$

$0 \leq r < 1$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  はともに収束し, さらに  $\theta = \frac{\pi}{3}$  とすると,

$$Q = \left( \frac{\text{チ} - r}{\text{ツ} - 2r + \text{テ} r^2}, \frac{\sqrt{\text{ト}} r}{\text{ツ} - 2r + \text{テ} r^2} \right)$$

である.