岡山大学

2011 年 第 3 問

数理 石井K

3 n を自然数とする．曲線 $y = x^2(1-x)^n \ (0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする．

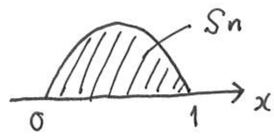
(1) S_n を求めよ．

(2) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ を求めよ．

(1) $0 < x < 1$ において，$x^2(1-x)^n > 0$ であり

$x^2(1-x)^n = 0$ となるのは $x = 0, 1$ のとき

∴ グラフは右のようになる．



$t = 1-x$ とおいて置換積分　$dt = -dx$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$$\therefore S_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx$$

$$= \int_1^0 -(1-t)^2\, t^n\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{n+2} - 2t^{n+1} + t^n\,dt$$

$$= \left[\frac{t^{n+3}}{n+3} - \frac{2t^{n+2}}{n+2} + \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \underline{\frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1}} \ //$$

(2) $$T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{残} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{残}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} - \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n+3}}_{\to 0}$$

$$\therefore \underline{\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{6}} \ //$$