0002218541877999

西南学院大学

2016年 神学・経済 第5問

1枚目／2枚

数理 石井K

5 次の問いに答えよ．

Ⅰ X_i，Y_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ は実数とする．$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2 \neq 0$，$Y_1{}^2+Y_2{}^2+Y_3{}^2 \neq 0$ のとき，

$$(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3)^2 \leqq (X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2)(Y_1{}^2+Y_2{}^2+Y_3{}^2) \quad \cdots\cdots ①$$

を以下の指示に従って，2通りの方法で証明せよ．

(1) すべての実数 t に対して，

$$(tX_1-Y_1)^2+(tX_2-Y_2)^2+(tX_3-Y_3)^2 \geqq 0$$

が成り立つことを利用して①を証明せよ．また等号が成り立つときの条件を示せ．

(2) 原点をOとする2つのベクトル，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(X_1,\ X_2,\ X_3),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(Y_1,\ Y_2,\ Y_3)$$

を考える．①を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって表せ．その上で，①を証明せよ．また等号が成り立つときの2つのベクトルの位置関係を示せ．

Ⅱ 対応する2つの変量 x，y の値の組 $(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ を考える．変量 x の平均を $\overline{x}$ とし，x の偏差を X とする．すなわち，$X_i=x_i-\overline{x}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ であり，変量 y についても同様とする．また x，y の相関係数が定義できる場合を考え，これを r とする．このとき，上記①を用いて，

$$-1 \leqq r \leqq 1$$

となることを示せ．

tについて降べきの順に並べ tの2次方程式とみる．

Ⅰ (1) $(tX_1-Y_1)^2+(tX_2-Y_2)^2+(tX_3-Y_3)^2 \geqq 0 \iff \underbrace{(X_1^2+X_2^2+X_3^2)}_{\neq 0}t^2-2(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3)t+Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2 \geqq 0$

これがすべての実数 t について成り立つから，判別式をDとすると

$\frac{D}{4}=(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3)^2-(X_1^2+X_2^2+X_3^2)(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2) \leqq 0$

よって，$(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3)^2 \leqq (X_1^2+X_2^2+X_3^2)(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2)$ が成り立つ ■

等号成立は $tX_1-Y_1=tX_2-Y_2=tX_3-Y_3=0$ すなわち $X_1:X_2:X_3=Y_1:Y_2:Y_3$ のとき //

(2) ① $\iff (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2 \leqq |\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2$ // これを示す

$(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2=|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2\cos^2\theta$

$0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1$ より $(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2 \leqq |\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2$ ■

等号が成り立つのは，$\cos^2\theta=1$ すなわち $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が平行のとき //

西南学院大学

2016年 神学・経済 第5問　2枚目／2枚

数理 石井K

5 次の問いに答えよ．

Ⅰ X_i，Y_i $(i=1,\ 2,\ 3)$は実数とする．$X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2 \neq 0$，$Y_1{}^2+Y_2{}^2+Y_3{}^2 \neq 0$のとき，

$$(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3)^2 \leqq (X_1{}^2+X_2{}^2+X_3{}^2)(Y_1{}^2+Y_2{}^2+Y_3{}^2) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

を以下の指示に従って，2通りの方法で証明せよ．

(1) すべての実数tに対して，

$$(tX_1-Y_1)^2+(tX_2-Y_2)^2+(tX_3-Y_3)^2 \geqq 0$$

が成り立つことを利用して①を証明せよ．また等号が成り立つときの条件を示せ．

(2) 原点をOとする2つのベクトル，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(X_1,\ X_2,\ X_3),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(Y_1,\ Y_2,\ Y_3)$$

を考える．①を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$によって表せ．その上で，①を証明せよ．また等号が成り立つときの2つのベクトルの位置関係を示せ．

Ⅱ 対応する2つの変量x，yの値の組$(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$を考える．変量xの平均を$\overline{x}$とし，xの偏差をXとする．すなわち，$X_i=x_i-\overline{x}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$であり，変量yについても同様とする．またx，yの相関係数が定義できる場合を考え，これをrとする．このとき，上記①を用いて，

$$-1 \leqq r \leqq 1$$

となることを示せ．

Ⅱ xの分散，yの分散，x,yの共分散をそれぞれs_x^2，s_y^2，s_{xy}と表すと

$$\text{①} \iff 9\cdot\left(\frac{X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3}{3}\right)^2 \leqq 9\cdot\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{3}\cdot\frac{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2}{3}$$

$$\iff (s_{xy})^2 \leqq s_x^2\cdot s_y^2$$

$$\iff -\sqrt{s_x^2}\sqrt{s_y^2} \leqq s_{xy} \leqq \sqrt{s_x^2}\sqrt{s_y^2}$$

よって，$r=\dfrac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2}\sqrt{s_y^2}}$ より

$-1 \leqq r \leqq 1$ ▨