

2016年 神学・経済 第5問

5 次の問いに答えよ。

Ⅰ  $X_i, Y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )は実数とする.  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \neq 0, Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 \neq 0$ のとき,

$$(X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3)^2 \leq (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を以下の指示に従って, 2通りの方法で証明せよ.

(1) すべての実数  $t$  に対して,

$$(tX_1 - Y_1)^2 + (tX_2 - Y_2)^2 + (tX_3 - Y_3)^2 \geq 0$$

が成り立つことを利用して ① を証明せよ. また等号が成り立つときの条件を示せ.

(2) 原点を  $O$  とする 2つのベクトル,

$$\vec{OA} = (X_1, X_2, X_3), \quad \vec{OB} = (Y_1, Y_2, Y_3)$$

を考える. ① を  $\vec{OA}$  と  $\vec{OB}$  によって表せ. その上で, ① を証明せよ. また等号が成り立つときの 2つのベクトルの位置関係を示せ.

Ⅱ 対応する 2つの変数  $x, y$  の値の組  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を考える. 変数  $x$  の平均を  $\bar{x}$  とし,  $x$  の偏差を  $X$  とする. すなわち,  $X_i = x_i - \bar{x}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) であり, 変数  $y$  についても同様とする. また  $x, y$  の相関係数が定義できる場合を考え, これを  $r$  とする. このとき, 上記 ① を用いて,

$$-1 \leq r \leq 1$$

となることを示せ.