

2015年教育・農・理(生物, 地球) 第3問

3 関数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の増減, 極値を調べて, グラフの概形をかけ.
 (2) k を定数とするとき, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = kx$ の共有点の個数を調べよ.

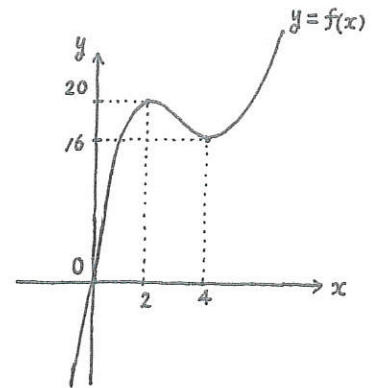
$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \\ &= 3(x^2 - 6x + 8) \\ &= 3(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

x	...	2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗		↘	

増減表より, 極大値は $f(2) = 8 - 36 + 48 = 20$,

極小値は, $f(4) = 64 - 144 + 96 = 16$

よってグラフは右のようになる.



- (2) $y = f(x)$ と $y = kx$ の共有点の個数は, 方程式 $f(x) - kx = 0$ の異なる実数解の個数に等しい.

$$f(x) - kx = 0 \iff x(x^2 - 9x + 24 - k) = 0 \quad \leftarrow \text{解の1つは } x=0 \quad \dots (*)$$

ここで, $g(x) = x^2 - 9x + 24 - k$ とおく

- (i) $x=0$ が $g(x)=0$ の解となるとき,

$$g(0) = 24 - k = 0 \quad \therefore k = 24 \quad \text{このとき, } (*) \text{ の実数解は, } x = 9, 0 \text{ (重解)}$$

- (ii) $x=0$ が $g(x)=0$ の解ではないとき ($k \neq 24$ のとき)

$$g(x) = 0 \text{ の判別式を } \mathcal{D} \text{ とすると, } \mathcal{D} = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (24 - k) = 4k - 15$$

(*) の実数解の個数は, $k < \frac{15}{4}$ のとき 1個, $k = \frac{15}{4}$ のとき 2個, $k > \frac{15}{4}$ かつ $k \neq 24$ のとき 3個.

(i), (ii) をまとめると, $k < \frac{15}{4}$ のとき 1個, $k = \frac{15}{4}, 24$ のとき 2個, $\frac{15}{4} < k < 24, 24 < k$ のとき 3個.