0002188811187999

# 北海道大学

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $a$, $b$, $c$ を実数とし，

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおく．曲線 $C : y = f(x)$ 上に異なる2点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある．

(1) Pにおける $C$ の接線の方程式を求めよ．

(2) Pにおける $C$ の接線とQにおける $C$ の接線が平行になるための条件を $s$, $t$, $a$ の関係式として求めよ．

(3) (2)の条件のもとで，線分PQの中点が $C$ 上にあることを示せ．

(1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

∴ Pにおける $C$ の接線は，

$y = (3s^2 + 2as + b)(x - s) + s^3 + as^2 + bs + c$

∴ $\underline{y = (3s^2 + 2as + b)x - 2s^3 - as^2 + c}$ //

(2) (1)と同様にして，Qにおける $C$ の接線は，

$y = (3t^2 + 2at + b)x - 2t^3 - at^2 + c$

∴ 2本の接線が平行 $\iff 3s^2 + 2as + b = 3t^2 + 2at + b$

$\iff 3(s+t)(s-t) + 2a(s-t) = 0$

$\iff (s-t)(3s + 3t + 2a) = 0$

P≠Qより，$s \neq t$ であるから，$3s + 3t + 2a = 0$

∴ $\underline{s + t = -\frac{2}{3}a}$ //

(3) 線分PQの中点を $\mathrm{M}(X, Y)$ とおくと，

$X = \frac{s+t}{2} = -\frac{a}{3}$，$Y = \frac{f(s)+f(t)}{2} = \frac{1}{2}(s^3 + t^3) + \frac{a}{2}(s^2 + t^2) + \frac{b}{2}(s + t) + c$

これを使ってYの式変形をする．

$= \frac{1}{2}(s+t)(s^2 - st + t^2) + \frac{a}{2}(s^2 + t^2) + \frac{b}{2}(s+t) + c$

$= X\{(2X)^2 - 3st\} + \frac{a}{2}\{(2X)^2 - 2st\} + bX + c$

$= 4X^3 - 3stX + 2aX^2 - ast + bX + c$

$= X^3 + aX^2 + bX + c + (3X^3 + aX^2 - 3stX - ast)$

$= X^3 + aX^2 + bX + c + (3X^3 - 3X^3 - 3stX + 3stX)$

$= X^3 + aX^2 + bX + c$　　∴ 中点Mは $C$ 上にある ▨