0001832907618999

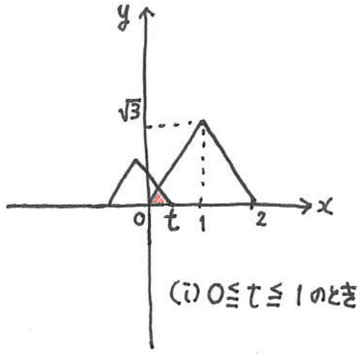
愛知教育大学

2014 年 第 4 問

$\boxed{4}$ 座標平面上に点 A(0, 0), B(2, 0), C(1, $\sqrt{3}$) を頂点とする正三角形 ABC をとる．また，点 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 0)$, $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を頂点とする正三角形を x 軸の正の方向に t だけ平行移動して得られる正三角形 PQR を考える．ただし，t は 0 以上の実数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle$ABC と $\triangle$PQR の共通部分の面積を $f(t)$ とするとき，関数 $y=f(t)$ のグラフの概形を描け．

(2) 曲線 $y=f(t)$ と t 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

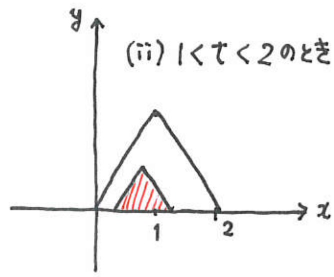


(1) 右のグラフより．

(i) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき．

共通部分も正三角形となり，一辺の長さは t なので

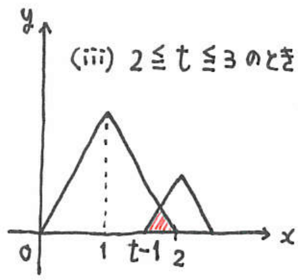
$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2$$



(ii) $1<t<2$ のとき．

共通部分は，一辺の長さが 1 の正三角形

$$\therefore f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

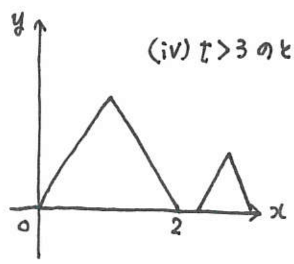


(iii) $2 \leqq t \leqq 3$ のとき．

共通部分は，正三角形で一辺の長さは，

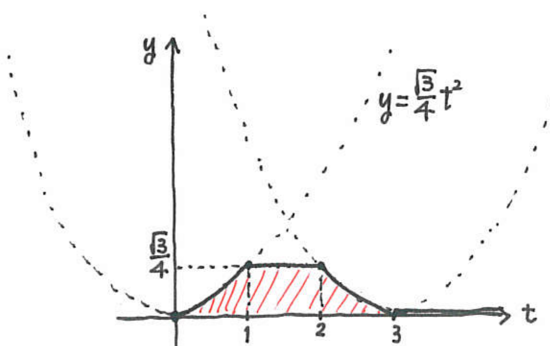
$$2-(t-1)=3-t$$

$$\therefore f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(3-t)^2$$



(iv) $t>3$ のとき．

共通部分はないので，$f(t)=0$



∴右のグラフの実線部分となる．

(2) グラフは $x=\frac{3}{2}$ に関して対称なので

$$S=2\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{4}t^2dt+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1+\frac{\sqrt{3}}{4}=\underline{\frac{5}{12}\sqrt{3}}\ //$$