愛知教育大学

2015年 第8問　**1枚目／2枚**

数理 石井K

$\boxed{8}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+2)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n}$ で定めるとき，$\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和 S_{2n} を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ を求めよ．

(4) $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ とおくとき，$|S_{2n} - S| < 0.001$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(1) $b_n = a_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n(2n+2)} = \dfrac{1}{4n(n+1)}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \underline{\frac{n}{4(n+1)}} \ /\!/$$

(2) (1)と同様にして考える．$C_n = a_{2n-1}$ で定めると，

$$C_n = a_{2n-1} = \frac{-1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} C_k = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\cdot} \cdots + \cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= -\frac{n}{2n+1}$$

$$\therefore S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}(b_k + C_k) = \frac{n}{4(n+1)} - \frac{n}{2n+1} = \underline{-\frac{n(2n+3)}{4(n+1)(2n+1)}} \ /\!/$$

2015年 第8問　　2枚目／2枚

数理石井K

8 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+2)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n}$ で定めるとき，$\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和 S_{2n} を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ を求めよ．

(4) $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ とおくとき，$|S_{2n} - S| < 0.001$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(3) $$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{2+\frac{3}{n}}{4(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})} = \underline{-\frac{1}{4}}\ /\!/$$

(4) $$|S_{2n} - S| = \left| -\frac{n(2n+3)}{4(n+1)(2n+1)} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4(n+1)(2n+1)} \right|$$

$$= \frac{1}{4(n+1)(2n+1)}$$

$$\therefore |S_{2n} - S| < 0.001 \iff \frac{1}{4(n+1)(2n+1)} < 0.001$$

$$\iff 4(n+1)(2n+1) > 1000$$

$$\iff (n+1)(2n+1) > 250$$

$f(n) = (n+1)(2n+1)$ （n：自然数）とおくと，$f(n)$ は単調増加で，

$f(10) = 11\cdot 21 = 231 \leqq 250$，$f(11) = 12\cdot 23 = 276 > 250$

$\therefore$ 最小の n は．$\underline{n = 11}$ //