2015年 第9問

9 a, b を実数とし，$b<a$ とする．焦点が $(0,\ a)$，準線が $y=b$ である放物線を P で表すことにする．すなわち，P は点 $(0,\ a)$ からの距離と直線 $y=b$ からの距離が等しい点の軌跡である．

(1) 放物線 P の方程式を求めよ．

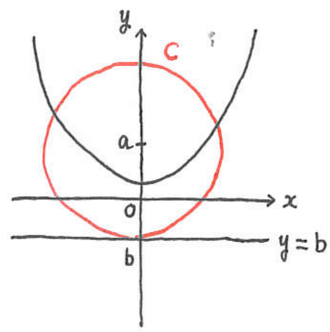
(2) 焦点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 $a-b$ の円を C とする．このとき，円 C と放物線 P の交点を求めよ．

(3) 円 C と放物線 P で囲まれた図形のうち，放物線 P の上側にある部分の面積を求めよ．

(1) P 上の点を (x,y) とおくと．点 $(0,a)$ からのキョリと $y=b$ からのキョリが等しいので

$$x^2+(y-a)^2=(y-b)^2$$

$$\therefore\ \underline{y=\frac{x^2}{2(a-b)}+\frac{a+b}{2}}\ //$$



(2) C 上の点は $\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ を用いて

$((a-b)\cos\theta,\ (a-b)\sin\theta+a)$ と表せるので

P の方程式に代入して．

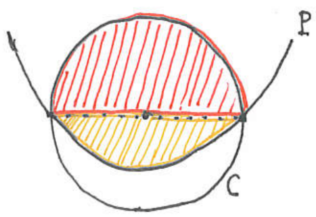
$$(a-b)\sin\theta+a=\frac{(a-b)^2\cos^2\theta}{2(a-b)}+\frac{a+b}{2}$$

$$\therefore\ \frac{a-b}{2}\cdot\sin\theta\cdot(\sin\theta+2)=0$$

$b<a$，$\sin\theta+2>0$ より．$\sin\theta=0$　$\therefore\ \theta=0,\pi$

$\therefore$ 交点は．$\underline{(a-b,\ a),\ (b-a,\ a)}\ //$

(3) 求める面積は右の斜線部分で S とおくと．



$S=$ 半円（赤色）＋ 残り（黄色）

$$=\pi\cdot(a-b)^2\cdot\frac{1}{2}+\int_{b-a}^{a-b}a-\frac{x^2}{2(a-b)}-\frac{a+b}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(a-b)^2+2\int_{0}^{a-b}-\frac{x^2}{2(a-b)}+\frac{a-b}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(a-b)^2+\left[-\frac{x^3}{3(a-b)}+(a-b)x\right]_0^{a-b}$$

$$=\underline{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\right)\cdot(a-b)^2}\ //$$