

2016年第3問


 数理
石井

3 a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし, x, y が $xy^2 = a^3$ を満たすとする. $x > 0, y > 0$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $X = \log_a x, Y = \log_a y$ とおくとき, X と Y の関係式を求めよ.
 (2) x, y が $\log_a x \cdot \log_a y \geq 1$ を満たすとき, y のとり得る値の範囲を求めよ.
 (1) $xy^2 = a^3$ の両辺, 底が a の対数をとると,

$$\log_a x + 2 \log_a y = 3$$

$$\text{よって, } \underline{X + 2Y = 3} \text{ ,,}$$

- (2) $\log_a x \cdot \log_a y \geq 1$ より, $XY \geq 1$

$$\therefore (1) \text{ より, } X + 2Y = 3 \text{ から } XY \geq 1$$

X を消去して,

$$(3 - 2Y)Y \geq 1$$

$$\therefore 2Y^2 - 3Y + 1 \leq 0$$

$$(2Y - 1)(Y - 1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq Y \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \log_a y \leq 1$$

$$\log_a a^{\frac{1}{2}} \leq \log_a y \leq \log_a a$$

$$0 < a < 1 \text{ であるから, } \underline{a \leq y \leq \sqrt{a}} \text{ ,,}$$