

2018年第5問

5 平面上に一辺の長さが1の正三角形  $OP_0Q_0$  がある. 線分  $OP_0$  上に点  $P_1$  を,  $\angle P_0Q_0P_1 = \frac{\pi}{12}$  となるようにとる. 次に, 線分  $OQ_0$  上に点  $Q_1$  を, 直線  $P_1Q_1$  が直線  $P_0Q_0$  に平行になるようにとる. 以下同様に, 自然数  $k$  に対し, 線分  $OP_k$  上に点  $P_{k+1}$  を,  $\angle P_kQ_kP_{k+1} = \frac{\pi}{12}$  となるようにとり, 線分  $OQ_k$  上に点  $Q_{k+1}$  を, 直線  $P_{k+1}Q_{k+1}$  が直線  $P_kQ_k$  に平行になるようにとる. 三角形  $P_{k-1}Q_{k-1}P_k$  の面積を  $a_k$  とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1)  $a_1$  を求めよ.

(2)  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  とするとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ.