0001833276618999

愛知教育大学

2014 年 第 7 問

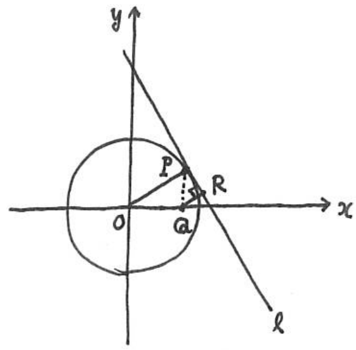
数理 石井K

$\boxed{7}$ $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とする．座標平面上に，原点 O を中心とする単位円 C 上の点 P$(\cos t,\ \sin t)$ と，x 軸上の点 Q$(\cos t,\ 0)$ をとり，点 P における C の接線を ℓ とする．また，点 Q から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) PR と QR を t を用いて表せ．

(3) (2) で求めた PR を $x(t)$，QR を $y(t)$ とする．点 S$(x(t),\ y(t))$ の軌跡を求めよ．



(1) $C: x^2+y^2=1$ より．

$\underline{\ell: x\cdot\cos t + y\cdot\sin t = 1}$ //

(2) OP // QR より．PR は 点 Q と 直線 OP とのキョリに等しい

OP: $y=\tan t\cdot x$ より．点と直線のキョリ公式を用いて

$$PR = \frac{|\tan t\cdot\cos t|}{\sqrt{\tan^2 t+1}} = \cos t\cdot|\sin t| = \underline{\sin t\cos t} //$$

$\triangle PQR$ において，三平方の定理より，$QR^2+PR^2=PQ^2$

$$\begin{aligned}\therefore QR^2 &= \sin^2 t - \sin^2 t\cos^2 t\\ &= \sin^2 t(1-\cos^2 t)\\ &= \sin^4 t\end{aligned}$$

$\therefore \underline{QR = \sin^2 t}$ //

(3) (2) より S の座標を (X, Y) とおくと．$X=\sin t\cos t$ ，$Y=\sin^2 t$

$\therefore 2X = \sin 2t$ ，$Y=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$ $\quad\therefore \cos 2t = 1-2Y$

これらを $\sin^2 2t+\cos^2 2t = 1$ に代入して．

$$4X^2+(1-2Y)^2=1 \quad \therefore \ X^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

ここで，$0<2t<\pi$ より．$0<\sin 2t \leqq 1$ $\quad\therefore 0<X\leqq\dfrac{1}{2}$ ，また，$0<Y<1$

$\therefore$ 求める軌跡は 円の一部 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

ただし．$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ の部分