愛知教育大学

2014 年 第 9 問

数理 石井K

$\boxed{9}$ $1 \leqq t \leqq e$ とする．定積分 $S(t)=\displaystyle\int_1^e |x-t|\frac{\log x}{x}\,dx$ を最小にする t の値を求めよ．ただし，log は自然対数を表し，e は自然対数の底を表す．

$1 \leqq t \leqq e$ より $S(t)=\displaystyle\int_1^t (t-x)\cdot\frac{\log x}{x}\,dx+\int_t^e (x-t)\cdot\frac{\log x}{x}\,dx$

$$=t\int_1^t \frac{\log x}{x}\,dx-\int_1^t \log x\,dx+\int_t^e \log x\,dx-t\int_t^e \frac{\log x}{x}\,dx$$

ここで $\left\{(\log x)^2\right\}'=2\cdot\dfrac{\log x}{x}$ より

$$S(t)=t\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^t-\int_1^t (x)'\log x\,dx+\int_t^e (x)'\log x\,dx-t\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_t^e$$

$$=\frac{t}{2}(\log t)^2-\Big[x\log x\Big]_1^t+\int_1^t dx+\Big[x\log x\Big]_t^e-\int_t^e dx-\frac{t}{2}+\frac{t}{2}(\log t)^2$$

$$=t(\log t)^2-t\log t+t-1+e-t\log t-e+t-\frac{t}{2}$$

$$=t(\log t)^2-2t\log t+\frac{3}{2}t-1$$

$$\therefore S'(t)=(\log t)^2+t\cdot 2\cdot\frac{\log t}{t}-2\log t-2+\frac{3}{2}$$

$$=(\log t)^2-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $S'(t)=0$ となるのは，$\log t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち $t=e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき

$e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}<1$ ，$1<e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}<e^1$ より

増減表は右のようになる

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e
	$-$	$-$	0	$+$	$+$
		↘		↗	

$\therefore$ $S(t)$ を最小にするのは

$$t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$