

2018年第5問

5 平面上に一辺の長さが1の正三角形 OP_0Q_0 がある. 線分 OP_0 上に点 P_1 を, $\angle P_0Q_0P_1 = \frac{\pi}{12}$ となるようにとる. 次に, 線分 OQ_0 上に点 Q_1 を, 直線 P_1Q_1 が直線 P_0Q_0 に平行になるようにとる. 以下同様に, 自然数 k に対し, 線分 OP_k 上に点 P_{k+1} を, $\angle P_kQ_kP_{k+1} = \frac{\pi}{12}$ となるようにとり, 線分 OQ_k 上に点 Q_{k+1} を, 直線 $P_{k+1}Q_{k+1}$ が直線 P_kQ_k に平行になるようにとる. 三角形 $P_{k-1}Q_{k-1}P_k$ の面積を a_k とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) a_1 を求めよ.

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.