2013年 理系 第5問

$\boxed{5}$ 2次の正方行列 A を $A=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で定める．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．ただし，$x_0=1,\ y_0=0$ とする．

(1) A^4 を求めよ．

(2) $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．ただし，E は2次の単位行列とする．

(3) 原点Oから P_n までの距離 OP_n が最大となる n を求めよ．