

2015年工・情報・環境学部(A)第2問

2 曲線 $y = x^3 + 3x^2$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線上の点 $(t, t^3 + 3t^2)$ における接線の方程式を求めよ。
 (2) 曲線に点 $A(1, -4)$ から引いた接線の方程式を求めよ。
 (3) 曲線に点 $P(1, p)$ から異なる3本の接線が引けるような p の値の範囲を求めよ。

(1) $y' = 3x^2 + 6x$ より、接線は、 $y = (3t^2 + 6t)(x - t) + t^3 + 3t^2$

すなわち、 $y = 3t(t+2)x - 2t^3 - 3t^2$ //

(2) (1) で求めた接線が $(1, -4)$ を通ることより、

$$-4 = 3t^2 + 6t - 2t^3 - 3t^2$$

$$t^3 - 3t - 2 = 0$$

$$\therefore (t-2)(t+1)^2 = 0 \quad \therefore t = 2, -1$$

$y = 24x - 28, y = -3x - 1$ //

(3) (1) で求めた接線が $(1, p)$ を通ることより、

$$p = 3t^2 + 6t - 2t^3 - 3t^2$$

$$\therefore 2t^3 - 6t + p = 0$$

(左辺) を $f(t)$ とおくと、

$$f'(t) = 6t^2 - 6 = 6(t+1)(t-1)$$

$$\therefore f'(t) = 0 \text{ となるのは、} t = \pm 1$$

$$\therefore f(1) < 0 \text{ か } f(-1) > 0 \text{ となれば}$$

$f(t) = 0$ は異なる3つの実数解をもつ。

$$\therefore f(1) = p - 4 < 0 \text{ か } f(-1) = p + 4 > 0$$

$-4 < p < 4$ //

t	...	-1	...	1	...
$f(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	\nearrow	$p+4$	\searrow	$p-4$	\nearrow

