

2014年第23問


 数理
石井K

23 関数 $f(t) = \int_0^\pi (x - t \sin x)^2 dx$ とする (t は実数). $f(t)$ が最小となるときの t の値を求めよ.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^\pi x^2 dx - 2 \int_0^\pi x t \sin x dx + \int_0^\pi t^2 \sin^2 x dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\pi - 2t \int_0^\pi x \cdot (-\cos x)' dx + \frac{t^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx \\
 &= \frac{\pi^3}{3} - 2t \left[-x \cos x \right]_0^\pi + 2t \int_0^\pi -\cos x dx + \frac{t^2}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\pi^3}{3} - 2t (\pi) + 2t \left[-\sin x \right]_0^\pi + \frac{t^2}{2} (\pi) \\
 &= \frac{\pi^3}{3} - 2\pi t + 2t \cdot 0 + \frac{\pi}{2} t^2 \\
 &= \frac{\pi}{2} t^2 - 2\pi t + \frac{\pi^3}{3} \\
 &= \frac{\pi}{2} (t^2 - 4t) + \frac{\pi^3}{3} \\
 &= \frac{\pi}{2} (t - 2)^2 - 2\pi + \frac{\pi^3}{3}
 \end{aligned}$$

$\therefore \underline{t=2}$ のとき $f(t)$: 最小