日本女子大学

2014年 理学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ a, b, c, d を定数で $a \neq 0$ であるものとし，曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ と直線 $y = 2x - 1$ は，x 座標が 2 である点で接し，x 座標が -1 である点で交わるものとする．

(1) b, c, d を a で表せ．

(2) これらの曲線と直線で囲まれた図形の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとき，a の値を求めよ．

(1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，$g(x) = 2x - 1$ とおくと．

x 座標が 2 である点で接する $\iff$ $f(2) = g(2)$ かつ $f'(2) = g'(2)$

$\therefore$ $8a + 4b + 2c + d = 3$ …①

$12a + 4b + c = 2$ …②

また，x 座標が -1 である点で交わるので，$-a + b - c + d = -3$ …③

① − ③ より，$9a + 3b + 3c = 6$ $\therefore$ $3a + b + c = 2$ …④

② − ④ より，$9a + 3b = 0$ $\therefore$ $\underline{b = -3a}$ //

④に代入して，$\underline{c = 2}$ //　　③に代入して，$\underline{d = 4a - 1}$ //

(2) $S = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left| ax^3 - 3ax^2 + 2x + (4a-1) - 2x + 1 \right| dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2} \left| ax^3 - 3ax^2 + 4a \right| dx$

$= |a| \displaystyle\int_{-1}^{2} \left| (x-2)^2(x+1) \right| dx$

ここで，$-1 \leqq x \leqq 2$ において $(x-2)^2(x+1) \geqq 0$ であるから 絶対値の中身は 0 以上

$= |a| \cdot \dfrac{1}{12} \cdot 3^4$

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4$

$= \dfrac{27}{4}|a|$

$\therefore$ $\dfrac{27}{4}|a| = \dfrac{9}{2}$ より $|a| = \dfrac{2}{3}$ $\therefore$ $\underline{a = \pm\dfrac{2}{3}}$ //