

2014年工学部第4問

4 α は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ と表すとき, r, θ の値を求めよ. ただし, $r > 0, 0 < \theta < \pi$ とする.

(2) $B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となることを数学的帰納法を用いて示せ.

(3) $A_n = r_n \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $(A_n)^n = A$ により定める. ただし, $r_n > 0, 0 < \theta_n < \frac{\pi}{n}$ とする. このとき, r_n, θ_n を n の式で表せ.

(4) (3) で定めた A_n を用いて行列 T_n を $T_n = nA_n$ により定める. 点 O を原点とする座標平面上において, T_n の表す 1 次変換によって点 $(1, 0)$ が移される点を P_n とするとき, $\triangle OP_n P_{n+1}$ の面積 S_n を n の式で表せ. また, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.