



2015年工学部・生命環境（生命工）第5問

5 点  $O$  を原点とする座標平面上において、点  $P(-6, 0)$  をとる。また、曲線

$$x = 3 \cos \theta, \quad y = 3 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を  $C_1$  とする。曲線  $C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$  を次のように順次定義する。

「点  $Q$  が曲線  $C_n$  上を動くとき、線分  $PQ$  を  $1:2$  に内分する点  $R$  のなす曲線を  $C_{n+1}$  とする。」

また、各自然数  $n$  に対して、点  $P$  を通る  $x$  軸と異なる直線が曲線  $C_n$  と接するとき、その接点を  $A_n$  とする。次に、 $\theta$  を  $1$  つ固定し、点  $X_1(x_1, y_1)$  を  $x_1 = 3 \cos \theta, y_1 = 3 \sin \theta$  となる曲線  $C_1$  上の点とし、点  $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$  を次のように順次定義する。

「線分  $PX_n$  を  $1:2$  に内分する点を  $X_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$  とする。」

- (1)  $x_2$  および  $y_2$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (2)  $\angle A_1PO$  および  $\angle A_2PO$  を求めよ。
- (3)  $x_n, y_n$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (4) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  を求めよ。
- (5) 直線  $A_nA_{n+1}$ 、曲線  $C_n$  および  $C_{n+1}$  で囲まれた領域の面積を  $a_n$  とするとき、極限值  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  を求めよ。