

2011年第4問

4 実数を成分に持つ行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  とベクトル  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$  について、以下の問いに答えよ。ただし、 $b \neq 0$  とする。

(1)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  のとき、 $AP = \alpha P$  と  $y > 0$  を満たす  $\alpha$  と  $y$  を求めよ。

(2) 次の3条件を満たす  $\beta$ ,  $z$ ,  $w$  を求めよ。

$$AQ = \beta Q, \quad z^2 + w^2 = 1, \quad z < w$$

(3) (1) と (2) で定められた  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  を用いて、次式を計算せよ。

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \end{pmatrix}$$

(4) (3) の結果を用いて、 $A^n$  を求めよ。ただし、 $n$  は1以上の自然数とする。