会津大学

2013年 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ nを自然数とするとき，次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$のとき. (左辺) $=1$, (右辺) $=\frac{1\cdot 4}{4}=1$ となり成り立つ

(ii) $n=k$のとき 成り立つと仮定すると.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$ が成り立つ

両辺に $(k+1)^3$ を加えると,

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\ &= (k+1)^2\cdot\left\{\frac{k^2}{4}+k+1\right\}\\ &= (k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}\\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\end{aligned}$$

となり. $n=k+1$のときも成り立つ.

(i), (ii) より n:自然数に対して 与式が成り立つ ▨