0001917542808999

会津大学

2014年 第1問

数理 石井K

1 次の空欄をうめよ．

(1) 次の積分を求めよ．ただし，積分定数は省略してもよい．

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\log x)^2} =$ イ

(ii) $\displaystyle\int_{6\pi}^{7\pi} x\sin x\,dx =$ ロ

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\cos x\,dx =$ ハ

(2) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+3)}-n) = \text{ニ}$$

(3) $3^x = 5^y = 15^6$ をみたす実数 x，y について，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} =$ ホ である．

(4) 2点 A$(-1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ からの距離の比が $1:2$ である点 P$(x,\ y)$ の軌跡を表す曲線の方程式は ヘ である．

(5) 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 3,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 0,\ -2)$ の両方に垂直で，大きさが1であるベクトルは ト と チ である．

(i) (与式) $\displaystyle = \int (\log x)' \cdot \frac{dx}{(\log x)^2} = \frac{1}{\log x} + \int \frac{2\,dx}{x(\log x)^2}$

$\displaystyle \therefore \int \frac{dx}{x(\log x)^2} = -\frac{1}{\log x}$

(ii) (与式) $\displaystyle = \int_{6\pi}^{7\pi} x(-\cos x)'\,dx$

$\displaystyle = \Big[-x\cos x\Big]_{6\pi}^{7\pi} - \int_{6\pi}^{7\pi}(-\cos x)\,dx$

$= 7\pi + 6\pi + \Big[\sin x\Big]_{6\pi}^{7\pi}$

$= 13\pi$

和・積の公式

(1)の(iii) (与式) $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\{\cos x + \cos 3x\}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$

(2) (与式) $\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n(n+3)}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle x = \log_3 15^6,\quad y = \log_5 15^6 = \frac{\log_3 15^6}{\log_3 5}$

$\displaystyle \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{\log_3 15^6} + \frac{\log_3 5}{\log_3 15^6} = \frac{\log_3 15}{\log_3 15^6} = \frac{1}{6}$

(4) $2\sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$ $\quad\therefore 4(x+1)^2+4y^2 = (x-2)^2+y^2$

$\therefore (x+2)^2+y^2 = 4$

(5) 求めるベクトルを $\vec{x}=(p,\ q,\ r)$ とおくと $p^2+q^2+r^2=1$ …①

$\vec{a}\cdot\vec{x} = 2p+3q+2r = 0$ …②

$\vec{b}\cdot\vec{x} = p-2r = 0$ …③

③より $p=2r$，②より $q=-2r$

①に代入して，$r=\pm\frac{1}{3}$

$\therefore \left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$