会津大学

2015 年 コンピュータ理工 第 2 問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ およびその階差数列 $\{b_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の空欄をうめよ．

(1) $b_1 = \boxed{\text{イ}}$ であり，b_{n+1} を b_n の式で表すと，$b_{n+1} = \boxed{\text{ロ}}$ である．

(2) b_n を n の式で表すと，$b_n = \boxed{\text{ハ}}$ である．

(3) a_n を n の式で表すと，$a_n = \boxed{\text{ニ}}$ である．

イ: 2　ロ: $2b_n + 1$　ハ: $3 \cdot 2^{n-1} - 1$　ニ: $3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$

(1) $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$ より

$$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = \underline{2}$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + (n+1) \quad \cdots ①$$
$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad \cdots ②$$

① − ② より，$\underline{b_{n+1} = 2b_n + 1}$

(2) $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

∴ 数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 3，公比 2 の等比数列 より

$$b_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \underline{b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1}$$

(3) $n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 \cdot 2^{k-1} - 1)$$
$$= 1 + \frac{3(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (n-1)$$
$$= \underline{3 \cdot 2^{n-1} - n - 1}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ