会津大学

2016年 コンピュータ理工 第1問

1 次の問いに答えよ．

(1) 次の計算をせよ．ただし，i は虚数単位である．

(i) $\displaystyle\int_1^e x^9 \log x\,dx = \boxed{イ}$ $\dfrac{9e^{10}+1}{100}$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \boxed{ロ}$ $\dfrac{2}{\pi}$

(iii) $(-1+i)^{21} = \boxed{ハ}$ $1024-1024i$

(2) 1333と1147の最大公約数は $\boxed{ニ}$ 31 である．

(3) 方程式 $8^x + 4^x = 9\times 2^x + 9$ の解は $x = \boxed{ホ}$ $\log_2 3$ である．

(4) $0 \leqq x \leqq \pi$ において関数 $y = 2\sin^2 x + 2\cos x + 1$ は $x = \boxed{ヘ}$ $\dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $\boxed{ト}$ $\dfrac{7}{2}$ をとる．

(5) $\triangle$ABCにおいて，$|\overrightarrow{AC}| = 6$，$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 24$ であるとき，$|\overrightarrow{AB}| = \boxed{チ}$ 5 であり，$\triangle$ABCの面積は $\boxed{リ}$ 9 である．

(1)(i)
$$(与式) = \int_1^e \left(\frac{x^{10}}{10}\right)' \log x\, dx$$
$$= \left[\frac{x^{10}}{10}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^9}{10}\,dx$$
$$= \frac{e^{10}}{10} - \left[\frac{x^{10}}{100}\right]_1^e$$
$$= \frac{e^{10}}{10} - \left(\frac{e^{10}}{100} - \frac{1}{100}\right)$$
$$= \underline{\frac{9e^{10}+1}{100}}_{\,//}$$

(ii) 区分求積法により．
$$(与式) = \int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 = \underline{\frac{2}{\pi}}_{\,//}$$

(iii) $(-1+i)^2 = -2i$，$(-1+i)^4 = (-2i)^2 = -4$

$\therefore (-1+i)^{21} = (-4)^5\cdot(-1+i) = \underline{1024-1024i}_{\,//}$

(2) ユークリッドの互除法により．

$1333 = 1147\cdot 1 + 186$

$1147 = 186\cdot 6 + 31$

$186 = 31\cdot 6$

$\therefore$ 最大公約数は $\underline{31}_{\,//}$

(3) $2^x = t\ (>0)$ とおくと．

$t^3 + t^2 = 9t + 9$

$\therefore (t+1)(t+3)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -1, \pm 3$

$t > 0$ より．$t = 3$

$\therefore 2^x = 3 \quad \therefore \underline{x = \log_2 3}_{\,//}$

(4)
$y = 2(1-\cos^2 x) + 2\cos x + 1$

$= -2\cos^2 x + 2\cos x + 3$

$= -2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

$\therefore 0 \leqq x \leqq \pi$ より．

$\underline{x = \frac{\pi}{3}\ のとき．最大値\ \frac{7}{2}}_{\,//}$

(5) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|$ より

$|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2$

$= 36 - 2\cdot 24 + |\overrightarrow{AB}|^2$

$= |\overrightarrow{AB}|^2 - 12$

$\therefore 13 = |\overrightarrow{AB}|^2 - 12$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2 = 25 \quad \underline{|\overrightarrow{AB}| = 5}_{\,//}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot 6^2 - 24^2}$

$= \underline{9}_{\,//}$