熊本大学

2016年 理系 第1問

数理 石井K

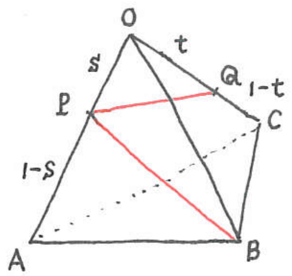
$\boxed{1}$ 1辺の長さ1の正四面体OABCを考える．$0 < s < \frac{1}{2}$ に対しOAを $s:(1-s)$ に内分する点をPとし，$0 < t < 1$ に対しOCを $t:(1-t)$ に内分する点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\mathrm{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{BPQ} = 90^\circ$ であるとき，t を s を用いて表せ．

(3) (2)の条件の下で，t の最大値とそのときの s の値を求めよ．

(4) (3)で求めた s，t に対して，PQ^2 を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP} = s\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ} = t\vec{c}$ であるから，

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{PB} = -s\vec{a} + \vec{b}}$ //

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ $\quad\therefore\ \underline{\overrightarrow{PQ} = -s\vec{a} + t\vec{c}}$ //

(2) OABCは$\underbrace{\text{正四面体}}_{\text{1辺の長さ1の}}$より，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot1\cdot\cos60^\circ = \frac{1}{2}$

$\angle BPQ = 90^\circ$ より，$\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{PQ}$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$

(1)より，
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ} &= (-s\vec{a}+\vec{b})\cdot(-s\vec{a}+t\vec{c})\\ &= s^2|\vec{a}|^2 - st\,\vec{c}\cdot\vec{a} - s\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t\,\vec{b}\cdot\vec{c}\\ &= s^2 - \tfrac{1}{2}st - \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t\end{aligned}$$

$\therefore\ s^2 - \frac{1}{2}st - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t = 0$ $\quad\therefore\ \underline{t = \dfrac{s-2s^2}{1-s}}$ //

(3) (2)より，$t = \dfrac{(1-s)(1+2s)-1}{1-s}$ $\quad\therefore\ t = 1 + 2s - \dfrac{1}{1-s}$

$t = 3 - \left\{2(1-s) + \frac{1}{1-s}\right\}$
とすれば $1-s > 0$ より，
相加・相乗でもいける．
テクニカルなので，やめた．
理系だとふつう微分する？

$\therefore\ t' = 2 - \dfrac{1}{(1-s)^2}$ $\quad\therefore\ t' = 0$ となるのは，$0 < s < \frac{1}{2}$ より，$s = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき．

$\therefore$ 右の増減表より，t が最大となるのは，$\underline{s = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\text{ のとき}}$ //

s	(0)	$\cdots$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$(\frac{1}{2})$
t'		$+$	0	$-$	
t		$\nearrow$		$\searrow$	

また，最大値は，$1 + 2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} = \underline{3 - 2\sqrt{2}}$ //

(4)
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= s^2|\vec{a}|^2 - 2st\,\vec{c}\cdot\vec{a} + t^2|\vec{c}|^2\\ &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(3-2\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2} + (3-2\sqrt{2})^2\\ &= \underline{\frac{1}{2}(27-19\sqrt{2})}\end{aligned}$$
//