九州大学

2014年 理系 第1問

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = x - \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．曲線 $y = f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを ℓ とする．

(1) ℓ の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

(2) a は (1) で求めたものとする．曲線 $y = f(x)$，直線 $x = a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(1) $f'(x) = 1 - \cos x$

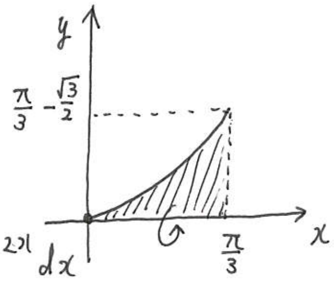
$\therefore$ $f'(x) = \frac{1}{2}$ となるのは．$1 - \cos x = \frac{1}{2}$ $\quad\therefore \cos x = \frac{1}{2}$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ より．$x = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\ell : y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore$ $\underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ //

このとき，接点は $\underline{\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ //

(2) (1)より $f'(x) \geqq 0$ $\quad\therefore f(x)$：単調増加



$$\therefore V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - \sin x)^2\, dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\, dx - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cdot(-\cos x)'\, dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - 2\pi\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos x\, dx + \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi^4}{81} - 2\pi\left(-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + 2\pi\left[-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$= \frac{\pi^4}{81} + \frac{\pi^2}{3} + 2\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

$$= \underline{\frac{\pi^4}{81} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{9}{8}\sqrt{3}\pi}$$ //