九州大学

2015年 文系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ．

(1) nが正の偶数のとき，2^n-1は3の倍数であることを示せ．

(2) pを素数とし，kを0以上の整数とする．$2^{p-1}-1=p^k$を満たすp，kの組をすべて求めよ．

(1) $n=2k$ (k：正の整数) とおけるので

$$\begin{aligned} 2^n-1 &= 2^{2k}-1 \\ &= 4^k-1^k \\ &= (4-1)(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+4+1) \\ &= 3\cdot\sum_{i=0}^{k-1}4^i \end{aligned}$$

$k\geqq 1$ より．この値は整数

よって．2^n-1 は 3の倍数 ▨

(2) (i) $p=2$ のとき．

与式は．$1=2^k$ $\therefore$ $k=0$ となり $(p, k)=(2, 0)$

(ii) $p>2$ のとき．

pは奇数の素数より，$p-1$は正の偶数．$\therefore$ (1)より $2^{p-1}-1$ は 3の倍数となり

p^kは3の倍数　したがって．$p=3$

与式は、$2^2-1=3^k$ $\therefore$ $3=3^k$ となり．$k=1$ $\therefore (p, k)=(3, 1)$

(i), (ii)より．$\underline{(p, k)=(2, 0), (3, 1)}$ //