2016年 理学部（数） 第3問　　1枚目/2枚　　数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の各問に答えよ．

(1) $x>1$ のとき $\log x < 2\sqrt{x}-2$ を示し，これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ．ただし，$\log$ は自然対数を表す．

(2) 関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(3) 定積分 I_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を以下で定義する．

$$I_n=\int_1^e \frac{(\log x)^{n-1}}{x^2}\,dx$$

ただし，e は自然対数の底である．このとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$I_{n+1}=-\frac{1}{e}+nI_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots \quad (*)$$

(4) 等式 $(*)$ を用いて，関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフと x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

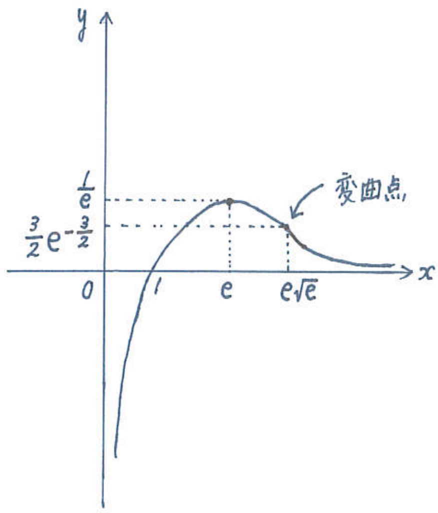
(1) $x>1$ のとき，$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x}$ であり，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\right)=0$ であるから，はさみうちの原理より，$\underline{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0}$ //

(2) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$　∴ $y'=0$ となるのは，$x=e$ のとき．

$y''=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$　∴ $y''=0$ となるのは，$x=e\sqrt{e}$ のとき

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$	(∞)
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$(-\infty)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘	(0)



$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$ より増減表は上のようになる．

以上より，グラフは右のようになる．

(3) $\displaystyle I_{n+1}=\int_1^e\frac{(\log x)^n}{x^2}\,dx$

$\displaystyle =\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'(\log x)^n\,dx$

$\displaystyle =\left[-\frac{1}{x}(\log x)^n\right]_1^e-\int_1^e-\frac{n}{x}\cdot(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

2枚目へつづく

静岡大学

2016年 理学部（数） 第3問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の各問に答えよ．

(1) $x > 1$ のとき $\log x < 2\sqrt{x} - 2$ を示し，これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ．ただし，log は自然対数を表す．

(2) 関数 $y = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(3) 定積分 I_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を以下で定義する．

$$I_n = \int_1^e \frac{(\log x)^{n-1}}{x^2}\,dx$$

ただし，e は自然対数の底である．このとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + nI_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots \quad (*)$$

(4) 等式 $(*)$ を用いて，関数 $y = \dfrac{\log x}{x}$ のグラフと x 軸および直線 $x = e$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

(3)のつづき

$\therefore I_{n+1} = -\frac{1}{e} + nI_n$ ▨

(4)
$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^e \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx \\
&= \pi\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x^2}\,dx \\
&= \pi I_3 \\
&= \pi\left(-\frac{1}{e} + 2I_2\right) \\
&= \pi\left\{-\frac{1}{e} + 2\left(-\frac{1}{e} + I_1\right)\right\} \\
&= -\frac{3}{e}\pi + 2\pi\int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{3}{e}\pi + 2\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e \\
&= -\frac{5}{e}\pi + 2\pi \\
&= \underline{\left(2 - \frac{5}{e}\right)\pi}\ //
\end{aligned}
$$