津田塾大学

2015年 学芸（国際関係） 第1問

1 次の問いに答えよ．

(1) n を自然数とするとき，不等式 $3^n > n^2$ を示せ．

(2) 正四面体 OABC において OA の中点を M，BC の中点を N とする．

(i) $\overrightarrow{MN}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(ii) 直線 MN と直線 BC は直交することを示せ．

(1) 数学的帰納法で示す

(i) $n=1, 2$ のとき，

$3^1 > 1^2$ ，$3^2 > 2^2$ となり，ともに成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，($k \geqq 2$ とする)

$3^k > k^2$

よって，$3^{k+1} > 3k^2 \cdots ①$

ここで，$3k^2-(k+1)^2 = 2k^2-2k-1$

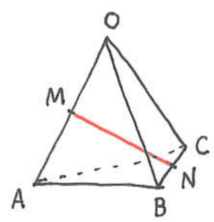
$= 2(k-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}$

$\therefore$ $k \geqq 2$ のとき，$3k^2-(k+1)^2>0$ すなわち $3k^2>(k+1)^2$ ($k \geqq 2$) $\cdots ②$

①，②より，$k \geqq 2$ のとき $3^{k+1}>3k^2>(k+1)^2$ となり，$n=k+1$ ($k \geqq 2$) のときも成り立つ

(i)，(ii)より，すべての自然数 n について，$3^n > n^2$ が成り立つ ▨

(2) (i) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ，$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$



$\therefore$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$

$= \underline{\frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})}$ //

(ii) 正四面体の1辺の長さを a とおくと，

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = a$ ，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = a^2\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$

よって，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})$

$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2-a^2+a^2-\frac{1}{2}a^2)$

$= 0$

$\therefore$ $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC}$ であり，点Nは辺BC上の点より，直線MNと直線BCは直交する ▨