0002097812097999

秋田大学

2015年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，AB ＝ BC ＝ CA，OA ＝ 1，OB ＝ OC ＝ $\sqrt{2}$，∠AOB ＝ ∠AOC ＝ 90°，∠BOC ＝ θ とする．点DをBCの中点とし，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 点PをAD上の点とし，AP : PD ＝ $t : (1-t)$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，t を用いて $\overrightarrow{OP}$ を表せ．

(2) 点PをAD上の動点とする．OPの長さが最小となるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用いて $\overrightarrow{OP}$ を表せ．

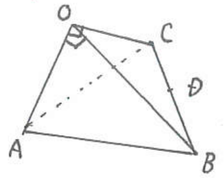
(3) 点Qを以下の ①～③ を満たすように定める．このとき $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用いて $\overrightarrow{OQ}$ を表せ．

① 四面体OABCの体積と四面体QABCの体積は等しい

② QA ＝ QB ＝ QC

③ 線分OQは3点A，B，Cが定める平面と交点をもたない．

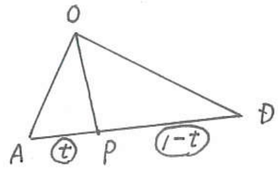
《注》 $\cos\theta = \frac{1}{4}$ なので
実は θ を用いなくても
表せる！



(1) $\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + t\overrightarrow{OD}$

$= (1-t)\vec{a} + t\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

$= \underline{(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}}$ //



(2) $|\overrightarrow{OP}|^2 = (1-t)^2|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}t^2|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}t^2|\vec{c}|^2$

$+ t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c} + \frac{1}{2}t^2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$= (1-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 + t^2\cos\theta$

$|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = 2\cos\theta$
より

$= (\cos\theta + 2)t^2 - 2t + 1$

$= (\cos\theta+2)\left(t - \frac{1}{\cos\theta+2}\right)^2 - \frac{1}{\cos\theta+2} + 1$

∴ $|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるのは，$t = \frac{1}{\cos\theta+2}$ のとき．

(注) $\overrightarrow{OP} = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$
でも正解

よって，(1)の結果に代入して，$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2(\cos\theta+2)}\left\{2(\cos\theta+1)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right\}$

(3) ①と③より，点Qは点Oを通り平面ABCに平行な平面上にある．

また，△ABCの重心をGとすると，$\overrightarrow{QG} \perp$ 平面ABC

点Pを(2)の条件をみたす点とすると，OPが最小 $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OP} \perp$ 平面ABC

以上より，$\overrightarrow{QG} \parallel \overrightarrow{OP}$，$|\overrightarrow{QG}| = |\overrightarrow{OP}|$　∴ $\overrightarrow{QG} = \overrightarrow{OP}$

(注) $\overrightarrow{OP} = -\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}$
でも正解

∴ $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \overrightarrow{OP}$　∴ $\underline{\overrightarrow{OQ} = \frac{2\cos\theta+1}{6(\cos\theta+2)}(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$ //