秋田大学

2013年 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) $f'(x) = \cos x + \cos 2x$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$

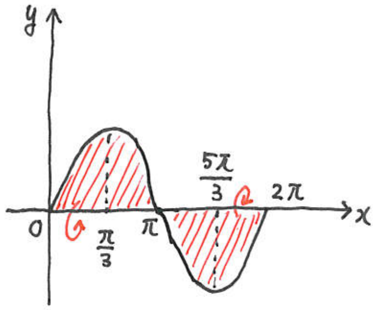
$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$\therefore f'(x) = 0$ となるのは，$x = \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0
			極大値				極小値		

$\therefore$ 右の増減表より，$\underline{\text{最大値}\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\left(x = \dfrac{\pi}{3}\text{のとき}\right)，\text{最小値}\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\left(x = \dfrac{5\pi}{3}\text{のとき}\right)}$ //

(2) (1)よりグラフは右のようになる．



$\therefore V = \pi\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx$

$f(\pi+\theta) = f(\pi-\theta)$ より．$(\pi, 0)$ に関して対称なので

$= 2\pi\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x + \sin x \sin 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x\, dx$

$= 2\pi\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\, dx + 2\pi\int_0^{\pi} 2\sin^2 x\cos x\, dx$

$= 2\pi\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x\, dx + 4\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos x\, dx$

$= 2\pi\left[\dfrac{5}{8}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi} + 4\pi\left[\dfrac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\pi}$

$= 2\pi\cdot\dfrac{5}{8}\pi$

$= \underline{\dfrac{5}{4}\pi^2}$ //