0002097722097999

秋田大学

2015年 医学部 第1問

数理 石井K

1 次の問いに答えよ．

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ．

(2) 整数 a，b，c に対して，$a+b+c$ と abc が3の倍数のとき，$a^3+b^3+c^3$ は9の倍数であることを示せ．

(3) 実数 a，b，c が $a+b+c=6$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$ を満たすとき，$a^3+b^3+c^3+3abc$ の値を求めよ．

(1) (与式) $=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=\underline{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$ //

(2) (1)より，

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc$

$=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc \quad \cdots①$

ここで，$(a+b+c)^3$ は 27の倍数（9の倍数），$3(a+b+c)(ab+bc+ca)$ は9の倍数，

$3abc$ は9の倍数なので，右辺は9の倍数　$\therefore a^3+b^3+c^3$ は9の倍数 ▨

(3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3} \iff \dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{1}{3}$

$\iff ab+bc+ca=\dfrac{1}{3}abc$

①より

$\therefore a^3+b^3+c^3+3abc=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+6abc$

$=6^3-3\cdot 6\cdot \dfrac{1}{3}abc+6abc$

$=\underline{216}$ //