秋田大学

2016年 教育文化（理数を除く）第3問

$\boxed{3}$ aは実数とする．座標平面上に3点A$(a^3+a-4,\ 5)$，B$(2a,\ 3)$，C$(a+1,\ 2)$がある．次の問いに答えよ．

(1) $a=0$のとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$に垂直で，大きさが1のベクトルを求めよ．

(2) $a=0$のとき，△ABCの面積を求めよ．

(3) 3点A，B，Cが一直線上に並ぶ場合があるか調べよ．

(1) $a=0$のとき，A$(-4, 5)$，B$(0, 3)$より

$\overrightarrow{AB}=(4, -2)$

求めるベクトルを$\vec{e}=(x, y)$とおくと，$\overrightarrow{AB}\perp\vec{e}$より $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}=0$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}=4x-2y=0 \qquad \therefore y=2x \ \cdots①$

$\vec{e}$は$|\vec{e}|=1$をみたすので，$x^2+y^2=1 \ \cdots②$

①，②より，$(x, y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ （複号同順）

$\therefore \underline{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\text{（複号同順）}}$ //

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

いま，$a=0$のとき，C$(1, 2)$で，$\overrightarrow{AC}=(5, -3)$ (1)より $\overrightarrow{AB}=(4, -2)$なので

$|\overrightarrow{AB}|^2=20$，$|\overrightarrow{AC}|^2=34$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=26$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{20\cdot 34-26^2}=\underline{1}$ //

(3) y成分が異なるので，3点A, B, Cはすべて異なる点である．

$\overrightarrow{CA}=(a^3-5, 3)$，$\overrightarrow{CB}=(a-1, 1)$

3点A, B, Cが一直線上に並ぶとき，$\overrightarrow{CA}=k\overrightarrow{CB}$をみたす実数$k$が存在する

よって，$\begin{cases} a^3-5=k(a-1) \\ 3=k \end{cases}$

これより，$a^3-5=3(a-1)$

$\therefore a^3-3a-2=0$

$\therefore (a+1)^2(a-2)=0$

$\therefore$ $\underline{a=-1, 2\text{のとき}}$ // 条件をみたす．