秋田大学

2012年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$, $g(x)=xf(x)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の定義域を求めよ．

(2) $g(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $2x-x^2 \geqq 0$ より $x(x-2)\leqq 0$ $\therefore$ $\underline{0\leqq x\leqq 2}$ //

(2) $g'(x)=1\cdot f(x)+xf'(x)$, $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(2-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

$\therefore g'(x)=\dfrac{3x(1-\frac{2}{3}x)}{\sqrt{2x-x^2}}$ $\therefore$ $g'(x)=0$ となるのは，$x=\frac{3}{2}$ $(0<x<2$ において$)$

右の増減表より，

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

$g(x)$ の $\underline{最大値は\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\ (x=\frac{3}{2}のとき)}$ //

$\underline{最小値は\ 0\ (x=0,2のとき)}$ //

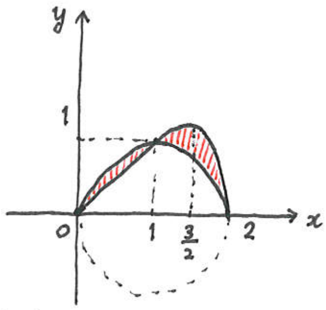
(3) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の $0\leqq x\leqq 2$ における交点を求めると，

$f(x)-g(x)=f(x)-xf(x)$

$=(1-x)f(x)$ $\therefore$ $x=0,1,2$ $\therefore$ 交点は $(0,0),(1,1),(2,0)$

また，$y=\sqrt{2x-x^2} \iff (x-1)^2+y^2=1$, $y\geqq 0$

求める面積を S とおくと，右グラフより，



$S=\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx+\int_1^2 g(x)-f(x)\,dx$

$=\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,(2-2x)\cdot\frac{1}{2}\,dx+\int_1^2\sqrt{2x-x^2}\cdot(2-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right]_1^2$

$=\underline{\dfrac{2}{3}}$ //