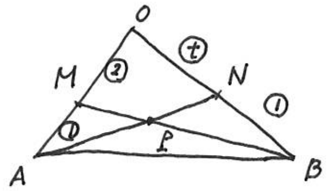
2014年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ tを正の実数とする．三角形OABの辺OAを2：1に内分する点をM，辺OBをt：1に内分する点をNとする．線分ANと線分BMの交点をPとする．

(1) $\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$およびtを用いて表せ．

(2) 直線OPは線分BMと直交し，かつ∠AOBの二等分線であるとする．このとき，辺OAと辺OBの長さの比とtの値を求めよ．



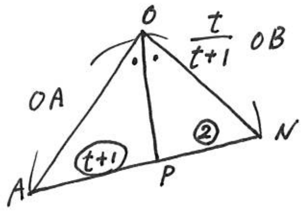
(1) メネラウスの定理より．

$$\frac{AM}{MO} \times \frac{OB}{BN} \times \frac{NP}{PA} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{t+1}{1} \times \frac{NP}{PA} = 1 \qquad \therefore PA : NP = t+1 : 2$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{2}{t+3}\overrightarrow{OA} + \frac{t+1}{t+3}\overrightarrow{OB}\cdot\frac{t}{t+1}$$

$$= \frac{2}{t+3}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{t+3}\overrightarrow{OB}$$



(2) $OA : \frac{t}{t+1}OB = t+1 : 2$

$$\therefore 2OA = tOB \cdots ①$$

また．$OP \perp BM$ より．$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

$$\left(\frac{2}{t+3}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{t+3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{4}{3(t+3)}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{2t-6}{3(t+3)}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \frac{t}{t+3}|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\therefore 4|\overrightarrow{OA}|^2 + (2t-6)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - 3t|\overrightarrow{OB}|^2 = 0 \cdots ②$$

①，② より．$4\cdot\frac{t^2}{4}|\overrightarrow{OB}|^2 + (2t-6)\cdot\frac{t}{2}|\overrightarrow{OB}|^2\cos\angle AOB - 3t|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$

$$\therefore t(t-3)|\overrightarrow{OB}|^2(1+\cos\angle AOB) = 0$$

$t>0$，$|\overrightarrow{OB}|>0$，$1+\cos\angle AOB > 0$ より

$t = 3$ 　このとき．① より．$OA : OB = 3 : 2$