# 弘前大学

2015年 理系 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a$ を実数とする．$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 ax\,dx$ を $a$ を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の増減を調べ，2つの数 $59^{61}$，$61^{59}$ の大小関係を決定せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^2 \int_1^{e^{\frac{1}{k}}} \frac{\log x}{x^k}\,dx$ を求めよ．ただし，$k$ は自然数を動くものとする．

(1) (i) $a=0$ のとき．

$$\int_0^{\pi} \sin^2 ax\,dx = 0$$

(ii) $a \neq 0$ のとき．

$$\int_0^{\pi} \sin^2 ax\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2ax}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi a}{4a}$$

(i), (ii) より，$\begin{cases} a=0 \text{ のとき } 0 \\ a \neq 0 \text{ のとき，} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\sin 2\pi a}{4a} \end{cases}$ //

(2) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ／ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ |

∴ 増減は右の増減表のようになる．

$$\therefore f(59) > f(61) \iff \frac{\log 59}{59} > \frac{\log 61}{61}$$

$$\iff 61\log 59 > 59\log 61$$

$$\iff \log 59^{61} > \log 61^{59}$$

$$\iff \underline{59^{61} > 61^{59}}\ //$$

(3) $k>1$ のとき．

$$\int_1^{e^{\frac{1}{k}}} \frac{\log x}{x^k}\,dx = \int_1^{e^{\frac{1}{k}}} \left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\right)' \log x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x\right]_1^{e^{\frac{1}{k}}} - \int_1^{e^{\frac{1}{k}}} \frac{x^{-k}}{1-k}\,dx$$

$$= \frac{e^{\frac{1-k}{k}}}{k(1-k)} - \left[\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2}\right]_1^{e^{\frac{1}{k}}}$$

2枚目につづく

2015年 理系 第1問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a$ を実数とする．$\int_0^{\pi} \sin^2 ax\,dx$ を $a$ を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の増減を調べ，2つの数 $59^{61}$，$61^{59}$ の大小関係を決定せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^2 \int_1^{e^{\frac{1}{k}}} \frac{\log x}{x^k}\,dx$ を求めよ．ただし，$k$ は自然数を動くものとする．

(3) のつづき

$$\therefore \int_1^{e^{\frac{1}{k}}} \frac{\log x}{x^k}\,dx = \frac{e^{\frac{1-k}{k}}}{k(1-k)} - \frac{e^{\frac{1-k}{k}}}{(1-k)^2} + \frac{1}{(1-k)^2}$$

$$= \frac{1-2k}{k(1-k)^2} \cdot e^{\frac{1-k}{k}} + \frac{1}{(1-k)^2}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} k^2 \int_1^{e^{\frac{1}{k}}} \frac{\log x}{x^k}\,dx = \lim_{k\to\infty}\left\{ \frac{\frac{1}{k}-2}{\left(\frac{1}{k}-1\right)^2} e^{\frac{1}{k}-1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{k}-1\right)^2} \right\}$$

$$= -2e^{-1}+1$$

$$= \underline{1-\frac{2}{e}}\,{}_{//}$$