兵庫県立大学

2016年 工学部 第2問

数理 石井K

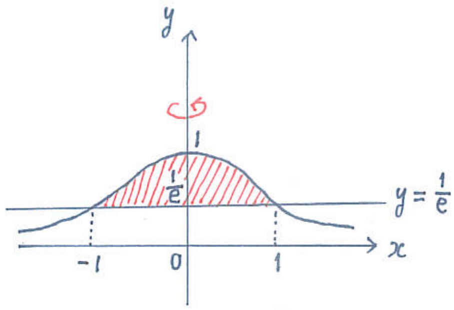
$\boxed{2}$ 曲線 $y=e^{-x^2}$ と直線 $y=\dfrac{1}{e}$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ.

$y'=-2xe^{-x^2}$

$\therefore$ $y'=0$ となるのは $x=0$ のとき.

また, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=0$ であるから増減表は次のようになる.

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(∞)
y'		$+$	0	$-$	
y	(0)	$\nearrow$	1	$\searrow$	(0)



$\therefore$ グラフは右のようになる.

$y=\frac{1}{e}$ との交点の x 座標は

$$e^{-x^2}=e^{-1} \iff x=\pm 1$$

また, $y=e^{-x^2} \iff x^2=-\log y$

$$\therefore\ V=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^2\,dy$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{1} -\log y\,dy$$

$$=-\pi\int_{\frac{1}{e}}^{1} (y)'\log y\,dy$$

$$=-\pi\Big[y\log y\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\pi\int_{\frac{1}{e}}^{1} dy$$

$$=-\pi\cdot\left(-\frac{1}{e}\log\frac{1}{e}\right)+\left(1-\frac{1}{e}\right)\pi$$

$$=\underline{\left(1-\frac{2}{e}\right)\pi}\ //$$