

2016年 理系全学部日程 第4問

4  $n$  を自然数,  $k$  を 0 以上の整数とする. また,  $f(x) = |x \sin(nx)|$ ,  $x_k = \frac{k\pi}{n}$ ,  $\alpha_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$  とする. 次の問いに答えよ.

(1)  $T_k = \int_{x_k}^{\alpha_k} f(x) dx$  とする.  $T_k$  を  $n$ ,  $k$  を用いて表し, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T_k$  を求めよ.

(2)  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  の範囲で, 関数  $f(x)$  が最大値をとるときの  $x$  の値を  $\beta_k$  とする.  $U_k = \int_{x_k}^{\beta_k} f(x) dx$  とおくと, ある定数  $b$  を用いて  $U_k = \frac{k\pi + b|\sin(n\beta_k)|}{n^2}$  と表される. 定数  $b$  の値を求めよ. また, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k$  を求めよ.

(3)  $x_k \leq x \leq \alpha_k$  の範囲で, 関数  $g(x) = |x \cos(nx)|$  が最大値をとるときの  $x$  の値を  $\gamma_k$  とする. この  $\gamma_k$  と (2) の  $\beta_k$  に対して,  $V_k = \int_{\gamma_k}^{\beta_k} f(x) dx$  とおく. 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n V_k$  を求めよ.