新潟大学

2014年 理系 第5問

5 自然数 n に対して，$a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，不等式

$$\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx - a_n \right| \leqq \frac{1}{2n+3}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ．