2011 年 第 4 問

$\boxed{4}$ 平面内に三角形 ABC がある．その平面上で，1 点 O を定めておく．次の問いに答えよ．

(1) 三角形 ABC の内部に点 P があるとする．このとき，3 つの三角形 PBC，PCA，PAB の面積の比が $x : y : z$ であるならば，点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は次のように表されることを示せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}} + z\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{x + y + z}$$

(2) 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a = \mathrm{BC}$，$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とする．このとき三角形 ABC の内心 I について，その位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と a，b，c を用いて表せ．

(3) 三角形 ABC が鋭角三角形であるとき，その外心 Q の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\alpha = \angle\mathrm{CAB}$，$\beta = \angle\mathrm{ABC}$ を用いて表せ．