2014年 第7問

$\boxed{7}$ すべての実数 x, y に対して不等式

$$\frac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leqq \frac{a}{1+x^2+y^2} \quad \cdots (*)$$

が成り立つとき，a の値の範囲を求めよ．

$(*) \iff 1+x^2+y^2 \leqq a+ax^2+a(y-x)^2$

$\iff (2a-1)x^2-2ayx+(a-1)y^2+a-1 \geqq 0 \quad \cdots (**)$

(i) $2a-1<0$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき．

$(**)$ の左辺を x の関数とみると，そのグラフは上に凸の放物線であるから，

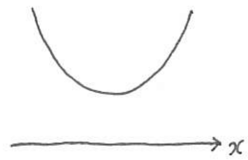
「すべての x に対して $(**)$ が成り立つ」ような a は存在しない．

(ii) $a=\frac{1}{2}$ のとき．

$(**) \iff -yx-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2} \geqq 0$

これは，例えば $x=y=0$ のとき成り立たない　∴ 不適

(iii) $a>\frac{1}{2}$ のとき．



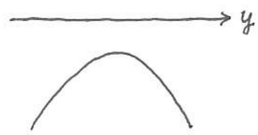
$(**)$ を x の関数とみると，右の図のようになるので，

判別式を D とおくと，$D \leqq 0$

$D/4=(ay)^2-(2a-1)\cdot\{(a-1)y^2+a-1\}$

$=(-a^2+3a-1)y^2-(2a^2-3a+1)$

∴ $(-a^2+3a-1)y^2-(2a^2-3a+1) \leqq 0$

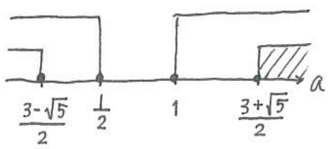


これがすべての y について成り立つので，

$-a^2+3a-1 \leqq 0$ かつ $-2a^2+3a-1 \leqq 0$

∴ $a \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq a$ かつ $a \leqq \frac{1}{2}$, $1 \leqq a$

$a>\frac{1}{2}$ に注意すると，$a \geqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$



場合分けの条件．

(i)〜(iii)より，$a \geqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ //