秋田大学

2013年 第2問

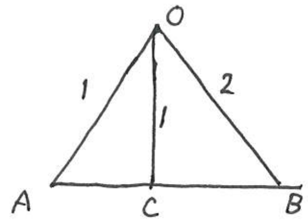
数理 石井K

$\boxed{2}$ △OABにおいて，辺AB上に $t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\ (0<t<1)$ となる点Cをとる．OA = 1，OB = 2，OC = 1 のとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ および t を用いて表せ．

(2) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ．

(3) AC = 1 のとき，t の値を求めよ．



(1) $t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ より．$t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}}$ //

(2) (1) より．$|\overrightarrow{OC}|^2=(1-t)^2|\overrightarrow{OA}|^2+2t(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t^2|\overrightarrow{OB}|^2$

$\therefore\ 1=(1-t)^2+2t(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4t^2$

$0<t<1$ より．$\underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{2-5t}{2(1-t)}}$ //

(3) $t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ より $|\overrightarrow{AC}|=1$ のとき，$t|\overrightarrow{AB}|=1$ $\cdots$ ①

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}|^2&=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2\\
&=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2\\
&=5-2\cdot\frac{2-5t}{2(1-t)}\\
&=5-\frac{2-5t}{1-t}\quad\cdots ②
\end{aligned}
$$

①，② より．$t^2\cdot\left(5-\dfrac{2-5t}{1-t}\right)=1$

$\therefore\ 3t^2+t-1=0$ $\quad\therefore\ t=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot3}}{6}$

$0<t<1$ より．$\underline{t=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}}$ //