2014年 工・農・医（生命科学）第3問　1枚目／2枚

3　1以上の整数 p, q に対し，$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $B(p,\ q)=B(q,\ p)$ が成り立つことを示せ．

(2) 関係式

$$B(p,\ q+1)=\frac{q}{p}B(p+1,\ q) \qquad B(p+1,\ q)+B(p,\ q+1)=B(p,\ q)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 関係式

$$B(p+1,\ q)=\frac{p}{p+q}B(p,\ q) \qquad B(p,\ q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,\ q)$$

が成り立つことを示せ．

(4) $B(5,\ 4)$ を求めよ．

(1) $t=1-x$ として置換積分する．$dt=-dx$，$\begin{array}{c||c} x & 0\to 1 \\ \hline t & 1\to 0 \end{array}$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$=\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}\cdot(-dt)$$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$=B(q,p) \quad ▨$$

(2) $$B(p,q+1)=\int_0^1\left(\frac{x^p}{p}\right)'(1-x)^q\,dx$$

$$=\left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^p}{p}\cdot(-q)\cdot(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$=\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$=\frac{q}{p}B(p+1,q) \quad ▨$$

$$B(p+1,q)+B(p,q+1)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx+\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx$$

$$=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}+x^{p-1}(1-x)^q\,dx$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\cdot\{x+(1-x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad =B(p,q) \quad ▨$$

2014年 工・農・医（生命科学）第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 1以上の整数 p, q に対し，$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $B(p,\ q)=B(q,\ p)$ が成り立つことを示せ．

(2) 関係式

$$B(p,\ q+1)=\frac{q}{p}B(p+1,\ q) \qquad B(p+1,\ q)+B(p,\ q+1)=B(p,\ q)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 関係式

$$B(p+1,\ q)=\frac{p}{p+q}B(p,\ q) \qquad B(p,\ q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,\ q)$$

が成り立つことを示せ．

(4) $B(5,\ 4)$ を求めよ．

(3) (2)の第2式に第1式を代入して，

$$B(p+1,q)+\frac{q}{p}B(p+1,q)=B(p,q)$$

$$\therefore B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q) \quad ▨$$

これを(2)の第1式に代入して，

$$B(p,q+1)=\frac{q}{p}\cdot\frac{p}{p+q}B(p,q)$$

$$=\frac{q}{p+q}B(p,q) \quad ▨$$

(4) (3)の第2式に，$p=5$, $q=3$ を代入すると，

$$B(5,4)=\frac{3}{8}\cdot B(5,3)$$

同様に，$p=5$, $q=2$ を代入すると，

$$B(5,3)=\frac{2}{7}B(5,2)$$

以下，くり返して，$B(5,2)=\frac{1}{6}B(5,1)$，

よって．$B(5,4)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}B(5,1)=\frac{1}{56}B(5,1)$

$B(5,1)=\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5}$ より，$\underline{B(5,4)=\frac{1}{280}}$ //