0001870369218999

秋田県立大学

2014年 理系 第4問

数理 石井K

4 平面上に三つの異なる定点O，A，Bがある．線分ABの中点をMとする．また，同じ平面上に動点Pがあり，$\angle APB = \frac{\pi}{2}$ を満たす．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ とする．以下の設問に答えよ．(1)は解答のみでよく，(2)，(3)は解答とともに導出過程も記述せよ．

(1) $\vec{m}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

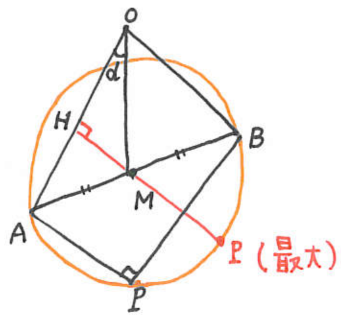
(2) $|\overrightarrow{MP}|$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = \sqrt{14}$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6$ が成り立つ．また，$\vec{a}$ と $\vec{m}$ のなす角を α，$\vec{a}$ と $\overrightarrow{MP}$ のなす角を β とする．ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ とする．以下の設問(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)に答えよ．

(ⅰ) $\cos\alpha$ の値を求めよ．

(ⅱ) $\triangle OPA$ の面積が最大となるときの β の値を求めよ．

(ⅲ) $\triangle OPA$ の面積の最大値を求めよ．



(1) $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ //

(2) 点Pは線分ABを直径とする円周上にあり．

この円の中心は点Mなので $|\overrightarrow{MP}|$ は半径となる．

$\therefore |\overrightarrow{MP}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\vec{b} - \vec{a}|$ //

(3) (i) (1)より $|\vec{m}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = \frac{3}{2}$　$\therefore |\vec{m}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)より $|\overrightarrow{MP}|^2 = \frac{1}{4}\left(|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2\right) = \frac{15}{2}$　$\therefore |\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{30}}{2}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{m}}{|\vec{a}||\vec{m}|} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$ //

(ii) 図のように．OA（一定）より 高さPHが最大のとき面積も最大となる

$\therefore \beta = \frac{\pi}{2}$ //

(iii) $\triangle OPA$ の最大値は．$\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot(MP + HM)$

ここで．$MP = \frac{\sqrt{30}}{2}$ ((i)より)，$HM = |\vec{m}|\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ より

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{\sqrt{30}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{30}}{2}$ //